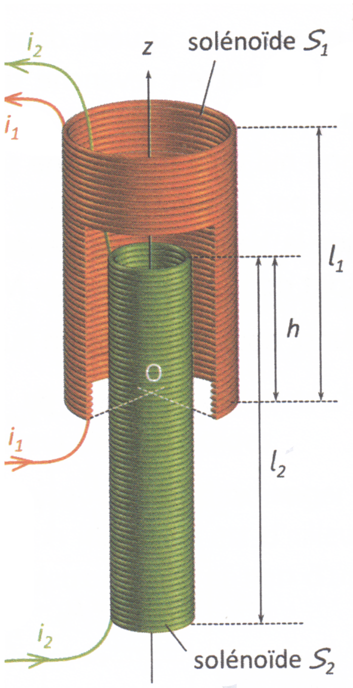
Applications de l'induction électromagnétique

Exercice 1 : Flux croisés de deux solénoïdes

On considère deux solénoïdes infinis $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, de même axe (Oz), de longueurs respectives l_1 et $l_2 \geq l_1$, possédant respectivement N_1 et N_2 spires, de surfaces respectives S_1 et $S_2 \leq S_1$, parcourues par des courants respectifs i_1 et i_2 orientés dans le sens direct par rapport à l'axe (Oz).
Le solénoïde $\mathcal{S}_2$ pénètre à l'intérieur du solénoïde $\mathcal{S}_1$ sur une longueur h.
On note L_1 et L_2 les inductances propres respectives des deux solénoïdes.



1) Calculer les flux croisés $\phi_{1\to2}$ et $\phi_{2\to1}$ du champ créé par un solénoïde à travers l'autre.
2) En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux solénoïdes. Discuter de l'influence de la longueur h sur la valeur de M et interpréter ce résultat.
3) Montrer que l'on a nécessairement :
$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$
Existe-il une configuration pour laquelle $M = \sqrt{L_1 L_2}$?

Correction :

1) *Calculons tout d'abord le flux $\phi_{2\to1}$ à travers $\mathcal{S}_1$ du champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ créé par $\mathcal{S}_2$.*
$\overrightarrow{B_2}$ étant nul à l'extérieur du solénoïde $\mathcal{S}_2$, son flux à travers une spire de $\mathcal{S}_1$ qui est située hors de la zone de chevauchement des deux solénoïdes est nul. En revanche, les N_1' spires de $\mathcal{S}_1$ qui sont

situées dans la zone de chevauchement des deux solénoïdes (de hauteur h) sont traversées par le champ magnétique 2 mais seulement sur la surface commune entre les deux solénoïdes :

$$\phi_{2\to1} = N_1' S_2 \overrightarrow{B_2}.\overrightarrow{e_z}$$
$$\Leftrightarrow\ \phi_{2\to1} = N_1 \frac{h}{l_1} S_2 \overrightarrow{B_2}.\overrightarrow{e_z}$$

Or, on connaît l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long parcouru par un courant d'intensité i_2 :

$$\overrightarrow{B_2} = \mu_0 n_2 i_2 \overrightarrow{e_z} = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} i_2 \overrightarrow{e_z}$$

Donc :

$$\boxed{\phi_{2\to1} = \mu_0 \frac{hN_1N_2S_2}{l_1l_2} i_2}$$

Calculons maintenant le flux $\phi_{1\to2}$ à travers $\mathcal{S}_2$ du champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ créé par $\mathcal{S}_1$.
$\overrightarrow{B_1}$ étant nul à l'extérieur du solénoïde $\mathcal{S}_1$, son flux à travers une spire de $\mathcal{S}_2$ qui est située hors de la zone de chevauchement des deux solénoïdes est nul. En revanche, les N_2' spires de $\mathcal{S}_2$ qui sont situées dans la zone de chevauchement des deux solénoïdes (de hauteur h) sont traversées par le champ magnétique 1 mais seulement sur la surface commune entre les deux solénoïdes :

$$\phi_{1\to2} = N_2' S_2 \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{e_z}$$
$$\Leftrightarrow\ \phi_{1\to2} = N_2 \frac{h}{l_2} S_2 \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{e_z}$$

Or, on connaît l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long parcouru par un courant d'intensité i_1 :

$$\overrightarrow{B_1} = \mu_0 n_1 i_1 \overrightarrow{e_z} = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \overrightarrow{e_z}$$

Donc :

$$\boxed{\phi_{1\to2} = \mu_0 \frac{hN_1N_2S_2}{l_1l_2} i_1}$$

2) *Le coefficient M d'inductance mutuelle est défini par :*

$$\phi_{2\to1} = Mi_2 \ \ et\ \ \phi_{1\to2} = Mi_1$$
$$donc\ \boxed{M = \mu_0 \frac{N_1N_2S_2}{l_1l_2} h}$$

Le coefficient d'inductance mutuelle augmente avec la hauteur h de recouvrement entre les deux solénoïdes. Ceci est tout à fait logique, puisque, par définition, le coefficient d'inductance mutuelle M quantifie le couplage magnétique entre les deux circuits.

3) *L'inductance propre d'un solénoïde infini est donné par :*

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1} \ \ et\ \ L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S_2}{l_2}$$

Ainsi :

$$\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{\mu_0 \frac{N_1N_2S_2}{l_1l_2} h}{\sqrt{\mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}} \times \sqrt{\mu_0 \frac{N_2^2 S_2}{l_2}}}$$

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \times \frac{h}{\sqrt{l_1 l_2}}}$$

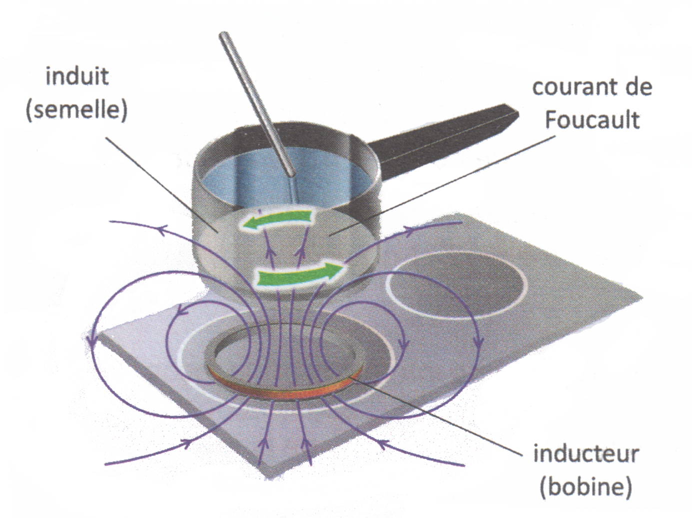
Par construction, $S_2 \leq S_1$ et $h \leq l_1$ et l_2, donc :

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \leq 1}$$

L'égalité est obtenue lorsque $S_2 = S_1$ et $h = l_1 = l_2$: les deux solénoïdes sont alors identiques et parfaitement emboîtés et le couplage entre les deux est maximal.

Exercice 2 : Etude d'une plaque à induction

Une **plaque à induction** permet de chauffer une poêle ou une casserole "à distance" par induction. Elle se distingue des plaques usuelles où le chauffage est réalisé par contact thermique avec un corps chaud (résistance électrique ou flamme) ou par exposition à un rayonnement (foyer radiant). Son principe est schématisé sur la figure ci-dessous : un bobinage, situé sous la plaque, est alimenté par un courant sinusoïdal qui crée un champ magnétique variable entre 20 et 50 kHz. Ce champ magnétique baigne le socle de la casserole. Celui-ci étant conducteur, il est le siège de courants induits qui, par effets Joule, provoque une élévation en température. Ainsi, bien qu'il ne s'agisse pas d'un circuit filiforme, c'est le fond de la casserole qui joue le rôle de circuit siège d'un phénomène d'induction. Les courants induits qui se répartissent dans tout le volume du métal de la casserole sont appelés **courants de Foucault**. La surface de la plaque ne reçoit que la chaleur transmise par diffusion par le fond de la casserole et montre donc très peu en température.



Dans une étude simplifiée du principe de fonctionnement d'une plaque à induction, la partie épaisse du fond de la casserole est modélisée par un ensemble de quatre spires circulaires concentriques, de diamètres respectifs D_1, D_2, D_3 et D_4.

On note R_1, R_2, R_3 et R_4 les résistances électriques respectives de ces spires.

La casserole est soumise à un champ magnétique variable, de direction orthogonale au fond de la casserole, de la forme :

$$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\, \vec{e_z}$$

1) Exprimer la force électromotrice e_k induite dans le circuit associé à la spire k ($k = 1,2,3$ ou 4).

2) En déduire l'expression de l'intensité i_k circulant dans le circuit associé à la spire k en fonction de ω, B_0, D_k et R_k.
3) Exprimer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans l'ensemble des quatre spires.
4) Exprimer la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule.

On rappelle que :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{2}$$

5) D'après la dépendance en fréquence, est-il pertinent de choisir des fréquences de fonctionnement de l'ordre de quelques dizaines de kilohertz ?

<u>Correction</u> :

1) *Considérons la spire k de diamètre D_k, orientée comme indiquée sur la figure, dans le sens trigonométrique, donc avec un vecteur surface élémentaire selon la verticale ascendante.*
On calcule le flux du champ magnétique à travers cette spire :

$$\phi_k = \iint_{\Sigma_k} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma_k} B_0 \sin(\omega t)\, \overrightarrow{e_z}.\, dS\overrightarrow{e_z}$$

$$\Leftrightarrow \phi_k = B_0\, \sin(\omega t) \iint_{\Sigma_k} dS$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\phi_k = B_0\, \sin(\omega t)\, \frac{\pi D_k^2}{4}}$$

Ce flux magnétique dépend du temps puisque le champ magnétique est variable. Il apparaît donc une force électromotrice induite dans la spire k, valant d'après la loi de Faraday :

$$e_k = -\frac{d\phi_k}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e_k = -\frac{\pi D_k^2}{4}\omega B_0 \cos(\omega t)}$$

2) *L'intensité i_k du courant induit circulant dans la spire k se calcule en appliquant la loi des mailles au circuit électrique équivalent (générateur de f.ém. e_k débitant dans une résistance R_k) :*

$$R_k i_k - e_k = 0 \;\Leftrightarrow\; i_k = \frac{e_k}{R_k}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i_k = -\frac{\pi D_k^2}{4R_k}\omega B_0 \cos(\omega t)}$$

3) *La puissance dissipée par effet Joule dans la spire k vaut :*

$$\mathcal{P}_k = R_k i_k^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_k = \frac{\pi^2 D_k^4}{16 R_k}\omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)$$

La puissance totale dissipée par effet Joule dans les 4 spires vaut donc :

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{4} \mathcal{P}_k = \sum_{k=1}^{4} \frac{\pi^2 D_k^4}{16 R_k} \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{\pi^2}{16}\left(\sum_{k=1}^{4} \frac{D_k^4}{R_k}\right) \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)}$$

4) *La valeur moyenne de la puissance dissipée par effet Joule dans les 4 spires vaut :*

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi^2}{16}\left(\sum_{k=1}^{4} \frac{D_k^4}{R_k}\right) \omega^2 B_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi^2}{32}\left(\sum_{k=1}^{4} \frac{D_k^4}{R_k}\right) \omega^2 B_0^2$$

5) *La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans les 4 spires est proportionnelle à ω^2 donc à f^2. Comme on cherche à dissiper beaucoup d'énergie par effet Joule (pour avoir un chauffage maximal), on a donc intérêt à travailler à haute fréquence (en tout cas supérieure au 50 Hz du secteur) : de l'ordre de 20 à 50 kHz.*

Exercice 3 : Principe d'une pince ampèremétrique

Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on utilise couramment une pince ampèremétrique.

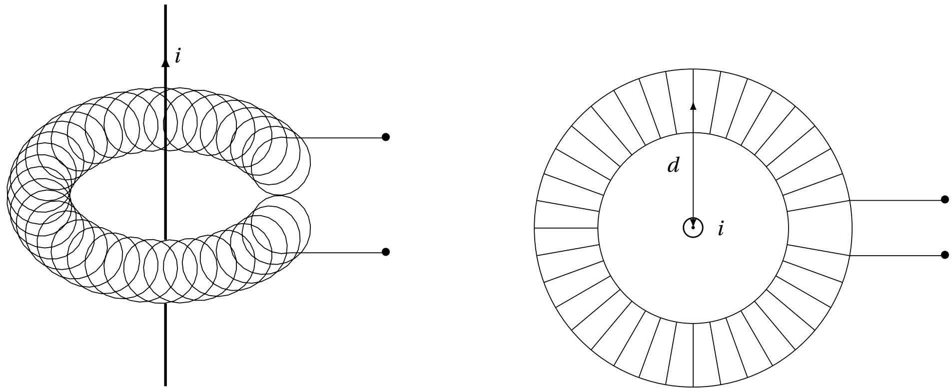
Cet exercice en présente le principe de fonctionnement.
On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil, assimilé à un fil rectiligne infini selon l'axe (Oz).
On choisit comme repère d'espace un système de coordonnées cylindriques.
L'intensité du courant qui circule dans le fil dans le sens des z croissants est de la forme :

$$i(t) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cos(\omega t)$$

Ce courant circulant dans le fil crée, à une distance r du fil, un champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2r} \overrightarrow{e_\theta}$$

On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de N spires circulaires, d'aire S, qui constitue une sorte de tore. Avec le système de coordonnées choisi, chaque spire a un vecteur surface orienté selon $\overrightarrow{e_\theta}$.



1) Que vaut le champ magnétique créé à une distance de 2,0 cm du fil lorsque celui-ci est parcouru par un courant d'intensité 1,0 A ?

Dans la suite, on considérera le champ magnétique uniforme à l'échelle du disque délimité par chaque spire, de valeur égale à la valeur B_0 au centre de cette spire, à la distance d du fil.

2) Exprimer la force électromotrice e développée aux bornes du circuit constitué par les N spires.
3) En déduire l'expression de la valeur efficace E_{eff} de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction de $\mu_0, S, \omega, N, I_{\text{eff}}$ et d.
4) Ce type de pince peut-il être utilisé pour mesurer des courants continus ?

<u>Correction</u> :

1) *A deux centimètres de l'axe du fil, le champ magnétique créé par le fil est de l'ordre de* $2{,}1.\,10^{-5}$ *T. En toute rigueur, ce champ n'est pas uniforme sur chaque spire puisque sa norme décroît avec la distance au fil.*
2) *Pour calculer la f.é.m. induite aux bornes du circuit, on calcule le flux du champ magnétique à travers cette spire :*

$$\phi = \iint_{N\text{ spires}} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = N \iint_{1\text{ spire}} \vec{B}.\overrightarrow{dS}$$

$$\Leftrightarrow \phi = NB_0\,S$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 NS}{2d} i}$$

Ce flux magnétique dépend du temps puisque l'intensité du courant électrique est variable. Il apparaît donc une force électromotrice induite dans le circuit, valant d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = -\frac{\mu_0 NS}{2d}\frac{di}{dt}}$$

Or :

$$i(t) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = \frac{\mu_0 NS}{\sqrt{2} d} I_{\text{eff}}\,\omega \sin(\omega t)}$$

3) *La valeur efficace E_{eff} de la tension mesurée avec la pince ampèremétrique vaut donc :*

$$\boxed{E_{\text{eff}} = \frac{\mu_0 NS}{2d} I_{\text{eff}}\, \omega}$$

On obtient ainsi une tension efficace qui est proportionnelle à l'intensité efficace du courant circulant dans le fil, ce qui est bien le but recherché.

4) *Le fonctionnement de la pince fonctionne repose sur le phénomène d'induction électromagnétique. Il faut donc que le flux du champ magnétique à travers les spires de la pince soit variable, ce qui impose un courant également variable. La pince ne permet donc pas de mesurer des courants continus.*

<u>Exercice 4</u> : Ligne haute tension et perte en ligne

Le but de cet exercice est de comprendre l'utilisation des lignes à haute tension pour le transport de l'électricité.
On note U la tension entre les deux câbles acheminant l'électricité et I l'intensité du courant dans chaque câble. On pourra raisonner en supposant des grandeurs continues.
On rappelle que la résistance d'un conducteur ohmique cylindrique, de conductivité γ, de longueur l et de section S vaut :

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

1) En supposant tout d'abord qu'il n'y a pas de chute de tension le long des câbles qui acheminent l'électricité, rappeler l'expression de la puissance utile P_u acheminée par la ligne en fonction de U et I.
2) En réalité, chaque câble présente une résistivité non nulle. On modélise chacune des deux câbles par un cylindre de section S et de conductivité γ.
   a) Exprimer la résistance r par unité de longueur d'un câble.
   b) Exprimer la chute de potentiel ΔU associée à cette résistance par unité de longueur de câble.
   c) Exprimer la puissance P_J dissipée par effet Joule par unité de longueur de câble, en fonction de P_u, U, γ et S.
   d) Conclure sur la pertinence de l'utilisation de la haute tension pour minimiser ces pertes. Quels sont les appareils utilisés pour obtenir ces hautes tensions ?

<u>Correction</u> :

1) *Dans le cas où on néglige la chute de tension le long de la ligne, la puissance acheminée par la ligne vaut :*

$$P_u = UI$$

2) *a) La résistance d'une longueur l de ligne vaut :*

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

La résistance par unité de longueur de ligne vaut donc :

$$r = \frac{R}{l} \iff \boxed{r = \frac{1}{\gamma S}}$$

b) La chute de potentiel ΔU par unité de longueur de câble, correspondant à cette résistance, est donnée par la loi d'Ohm :

$$\Delta U = rI \iff \boxed{\Delta U = \frac{I}{\gamma S}}$$

c) La puissance dissipée par effet par unité de longueur de câble vaut :

$$P_J = rI^2 \iff \boxed{P_J = \frac{I^2}{\gamma S}}$$

En utilisant l'expression de P_u déterminée dans la première question :

$$\boxed{P_J = \frac{P_u^2}{\gamma S U^2}}$$

d) Les autres paramètres étant fixes, on a intérêt à choisir une valeur très élevée pour la tension U afin de diminuer les pertes par effet Joule, d'où l'utilisation de lignes hautes tensions.